

Análisis de los modelos litterman y markowitz en búsqueda de eficiencia
de portafolios.

Jailinn Sofia Ortega Pantoja

Trabajo presentado como requisito para optar por el título de Economista

Tutor:

PhD. William Gilberto Delgado Munevar



Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca Facultad de Administración y Economía Economía

Bogotá D.C.

2022

Tabla de contenido

1. Resumen.....	3
2. Abstract	4
3. Introducción	5
4. Marco referencial	5
5. Metodología	9
6. Resultados y discusión	15
7. Conclusiones	26
8. Referencias.....	28

Índice de tablas

Tabla 2.....	19
Tabla 3.....	20
Tabla 4.....	20
Tabla 5.....	21
Tabla 6.....	21
Tabla 7.....	22
Tabla 8.....	22
Tabla 9.....	24
Tabla 10.....	24
Tabla 11.....	24
Tabla 12.....	25
Tabla 13.....	25
Tabla 14.....	26
Tabla 15.....	26
Tabla 16.....	26

Índice de gráficas

Gráfica 1.....	16
Gráfica 2.....	17
Gráfica 3.....	17

Índice de Ecuaciones

Equation 1.....	11
Equation 2.....	12
Equation 3.....	13
Equation 4.....	13
Equation 6.....	14
Equation 7.....	14

ANÁLISIS DE LOS MODELOS LITTERMAN Y MARKOWITZ EN BÚSQUEDA DE EFICIENCIA DE PORTAFOLIOS

Jailinn Sofia Ortega Pantoja

Categoría. Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca

jsortega@unicolmayor.edu.co

1. Resumen

Los portafolios de inversión son importantes para cualquier empresa que busque crecer financiera y económicamente, es por esto que el hecho de poder tener un portafolio de inversión adecuado y acorde a las necesidades de la empresa y del mercado resulta de vital importancia para el logro de este objetivo. Para alcanzar la mayor rentabilidad de los portafolios es necesario tener en claro aspectos generales tales como: la rentabilidad esperada y el nivel de exposición al riesgo, por ello en el presente documento se expondrán dos formas de alcanzar la rentabilidad esperada mediante dos modelos de rentabilidad, presentando las diferencias y las principales ventajas y desventajas de utilizar los métodos Markowitz y Black-Litterman, para ello se utilizarán 10 acciones para conformar un portafolio diversificado utilizando la herramientas de Business Analytic.

Palabras clave: Método de inversión, rentabilidad, riesgo, varianza, activos, portafolios, acciones.

ANALYSIS OF LITTERMAN AND MARKOWITZ MODELS IN SEARCH OF PORTFOLIO EFFICIENCY

2. Abstract

Los portafolios de inversión son importantes para cualquier empresa que busque crecer financiera y económicamente, es por esto que el hecho de poder tener un portafolio de inversión adecuado y acorde a las necesidades de la empresa y del mercado resulta de vital importancia para el logro de este objetivo. Para alcanzar la mayor rentabilidad de los portafolios es necesario tener en claro aspectos generales tales como: la rentabilidad esperada y el nivel de exposición al riesgo, por ello en el presente documento se expondrán dos formas de alcanzar la rentabilidad esperada mediante dos modelos de rentabilidad, presentando las diferencias y las principales ventajas y desventajas de utilizar los métodos Markowitz y Black-Litterman, para ello se utilizarán 10 acciones para conformar un portafolio diversificado utilizando las herramientas de Business Analytic.

Keywords: Investment method, profitability, risk, variance, assets, portfolios.

3. Introducción

Desde que Harry Markowitz publicó su escrito de *Portafolio de Selección un modelo de optimización*, en 1952 los estudios en optimización de portafolios han tenido avances significativos, estudiar la forma en que se debe invertir y cómo minimizar el riesgo es de suma importancia para los estudios económicos debido a que son un reflejo exacto de la situación actual de los mercados (Cruz, Clement, 2014). Aunque este tipo de estudios en un principio se desarrollaron en un orden nacional, la globalización hizo que los inversionistas pudieran acceder a activos nacionales e internacionales, lo que hacía necesario la creación de nuevos modelos de inversión.

Resaltando la importancia de los modelos de optimización para la toma de decisiones y por consiguiente a las finanzas, en el presente trabajo se expondrán los aspectos generales de dos de los modelos más relevantes en este estudio. El modelo de optimización de portafolios de Markowitz contribuyó a diversos desarrollos y derivaciones, proporcionando el marco conceptual del manejo eficiente de un portafolio, sin embargo Black-Litterman plantea una propuesta a la estructura formulada por Markowitz introduciendo en el análisis un nuevo aspecto: las expectativas de rentabilidad, el impacto de este argumento es de suma importancia para el análisis de portafolios de optimización, por lo que el objetivo principal de este trabajo será, exponer los aspectos más relevantes de los modelos de optimización propuestos por Harry Markowitz y Black Litterman, sus ventajas y la eficacia en los resultados para poder llegar a conclusiones pertinentes.

4. Marco Referencial

El mercado bursátil siempre ha sido un tema de interés en el mundo económico y financiero, pues establecer unos principios que permitan comprender y analizar de manera más fácil este mercado permite que los inversores tengan una mayor claridad y visión a la hora de intervenir

en el mismo, es por ello que exponer los avances relevantes en este campo, contribuye a conocer y familiarizarse con las generalidades de la inversión y amplían el panorama en materia de investigación, comportamiento y toma de decisiones según condiciones dadas.

El estudio más relevante en cuanto a inversión se encuentra dentro de la teoría moderna de portafolios, la cual, nace en 1952 cuando Harry Markowitz describe en el Portafolio de Selección un modelo de optimización con el que demuestra por primera vez la importancia de la diversificación en la elección de portafolios. Para ello, logró exponer y demostrar que la correlación entre los activos que conforman un portafolio minimiza el riesgo, generando así una elección óptima de estos, dicho argumento rápidamente ocasionó un gran reconocimiento a su trabajo e hizo comunes frases célebres tales como: “La diversificación es el único almuerzo gratis” (Montoya, Maya, 2017)

El modelo describe la elección de una cartera óptima realizando una combinación racional de activos, tales como: bonos, depósitos a largo y corto plazo, acciones y obligaciones, con el fin de minimizar el riesgo gracias a la diversificación de activos y la distribución de los mismos en distintos sectores. En su explicación más simple consiste en determinar las ponderaciones que maximizan el rendimiento esperado del portafolio, sujeto a un riesgo máximo admitido. (Franco, Avendaño y Barbutin, 2011)

Otra manera en la que Markowitz argumenta que es posible llegar a la optimización de un portafolio, es mediante las ponderaciones que minimizan el riesgo, basado en la hipótesis: que el rendimiento de un portafolio es una variable completamente aleatoria, para la cual se distribuye la probabilidad y que para minimizar el riesgo del portafolio se debe hacer uso de la varianza o la desviación estándar puesto que indican la dispersión. De la premisa anterior se argumenta que la conducta racional del inversionista lo lleva a preferir la composición de un portafolio que le represente la mayor rentabilidad, para determinado nivel de riesgo aceptado, según su aversión al riesgo

La elección correcta del portafolio en la teoría de portafolios, estará condicionada tanto por el nivel de riesgo que se esté dispuesto a asumir como a los mercados a los que el inversor quiera ingresar, aclarando que el nivel de riesgo puede ser más volátil según el mercado en que se desee realizar la inversión, razón por la cual definir el tipo de portafolio según los objetivos es un paso fundamental para llegar a un punto óptimo.

Además que el riesgo es medido por la varianza, que los inversionistas son racionales y que el rendimiento es una variable aleatoria y subjetiva otros de los principales supuestos en los que Markowitz basó su teoría, es que el mercado no tiene imperfecciones y adicionalmente que los activos se pueden adquirir en cualquier cantidad, incluso solo una parte de ellos, razón por la cual no se tienen en cuenta, costos de transacción, impuestos, etc. lo que en últimas implica que probablemente el modelo presente sesgos. (Cardona, 2006)

Sentar las bases conceptuales de la teoría moderna de portafolios hizo que el modelo de Markowitz ganara un gran respeto y admiración en el campo financiero y económico, sin embargo, dicho reconocimiento ocasionó a su vez un gran interés en demostrar los resultados que prometía. En 1963 Sharpe argumenta que el modelo necesita una mejora, dado que aunque funciona de manera eficiente relacionando los activos, presenta desventajas en cuanto a resultados, pues considera que la frontera eficiente, la cual se define como el conjunto de portafolios resultantes por las posibles combinaciones de riesgo y rendimiento que se pueden derivar del conjunto de activos que ofrecen el rendimiento esperado más alto para cualquier nivel de riesgo dado, no cumple con los objetivos planteados, esto, por la manera en que se obtienen sus estimados, lo que ocasiona resultados fragmentados y poco certeros, este argumento generó varias dudas acerca de la efectividad del modelo, pues a partir de la frontera eficiente, se establece el portafolio óptimo dependiendo de la función de utilidad o de las preferencias del agente (Betancourt, Garcia y Lozano, 2013)

Los argumentos de Sharpe hicieron parecer que aunque el modelo propuesto por Markowitz teóricamente promete ser uno de los más completos en cuanto a diversificación y

rentabilidad, a la hora de llevarlo a la práctica deja ver grandes falencias. Ante este argumento Michaud en 1989 describe que el hecho que el modelo de optimización utilice series de rentabilidades históricas, tomado como supuesto que la rentabilidad es coherente con su comportamiento en el pasado, produce grandes sesgos, debido a que es por ello que el resultado de la optimización de los portafolios se conforman de activos de alta rentabilidad, un bajo riesgo (medido por la varianza) y una poca correlación con otros activos, esto ocasiona que los portafolios sean altamente concentrados en pocos títulos, razón por la cual el resultado final es un portafolio con poca diversificación y alto riesgo, el cual a su vez ocasiona que cambios pequeños en la rentabilidad esperada signifiquen cambios muy grandes en el portafolio óptimo (Montoya, Maya, 2017).

Los constantes debates acerca de la eficiencia de los resultados en el modelo de Markowitz y las recurrentes críticas a la falencia que presenta este modelo en las soluciones de esquina hizo que Robert Litterman y Fisher Black en 1992 estructuraran el modelo de distribución de activos, el cual, aunque está basado en el modelo de Markowitz agrega un factor importante a la hora de elegir un portafolio óptimo y es el hecho de considerar las expectativas del inversionista sobre el mercado. Las expectativas hacen referencia al futuro esperado, el cual puede ser cierto o no, sin embargo se incluyen en el modelo sin preferencia alguna, debido a que se le da lugar a cada tipo de expectativa, sea absoluta, relativa simple o relativa múltiple. Con lo anterior, el modelo de Litterman y Black corrige los sesgos del modelo de Markowitz que se expusieron anteriormente, puesto que de acuerdo a la confianza que el inversor tenga en cada expectativa se le dará un peso al activo. (Salazar y Clement, 2014)

El modelo de Black y Litterman, parte de un equilibrio de mercado, es decir que es fundamental que la oferta y demanda de activos financieros sea la misma, puesto que, como explican los autores del modelo, las expectativas deben poder combinarse con el fin que el inversor pueda adelantarse a las desviaciones que se presenten en el equilibrio del mercado y de esta manera obtener una ventaja (Franco, Avendaño y Barbutin, 2011).

Para que el inversor pueda adelantarse a las desviaciones del mercado el modelo de Black y Litterman (BL) se caracteriza por la implementación de estadística bayesiana debido a que hace uso de la información tanto muestral y no muestral, aclarando que la información muestral obedece a aquellas expectativas que los inversores poseen sobre el mercado y a partir de esta información poder estimar los rendimientos esperados. Incluir aspectos subjetivos e intuitivos al modelo hace que el inversionista asuma un riesgo de inversión según la confianza que deposite o le genere cada activo, es por ello que en este modelo los llamados criterios de experto son de suma importancia, dado que tener más información sobre el mercado de cada activo hace más eficaz el modelo y viceversa. (Valencia, 2018)

5. Metodología

Los modelos de Markowitz y Black-Litterman se utilizan habitualmente para determinar un portafolio óptimo, es por esto que en este documento se estudia 1 portafolio diversificado con 10 acciones a través de ambos modelos para poder determinar qué modelo analiza de manera más eficiente el portafolio en el cual se debería invertir.

Esta investigación se basa en los modelos de Markowitz y Black-litterman, donde se realiza la ejecución y análisis de los respectivos modelos apoyándose en la información extraída de los escritos de “Mercado de capitales”, “Modelo de Black-Litterman para la optimización de portafolios con views obtenidos por modelación de volatilidad ” y en “Comparación de metodologías de optimización de carteras: Markowitz vs. Black-Litterman, para activos financieros colombianos” principalmente, para describir dichos modelos y posteriormente realizar análisis propios de los resultados. Adicional a esto con lo visto en el diplomado de “Business Analytic” se pudieron analizar los datos de una manera más adecuada, entendiendo las necesidades del modelo para así generar las respectivas bases de datos y el indicador base. Con estas herramientas se procede a crear una matriz de precios de tal modo que en esta se pueda visualizar los precios diarios de cada acción, donde se tomaron 10 acciones en un rango de 5 años, tomado desde 2015 a 2020 y a

su vez presentar un indicador, donde se tomó el índice Standard & Poor 's 500 (S&P 500) dado a que este permite hallar los resultados de los modelos aplicados y es una comparativo de lo que se sucedió en el mercado en el periodo escogido.

Para empezar el desarrollo de los modelos se debe descargar tanto el índice S&P 500 como las 10 acciones. Con los datos organizados se procede a dar inicio a los cálculos, para el modelo de Markowitz se crea una matriz de precios que corresponde a los datos de cierre de las 10 acciones y el índice durante el periodo mencionado, para crear esta matriz se utiliza lo las herramientas vista en el diplomado como lo es excel y google colab, las cuales nos ayudan a descargar y organizar los datos, que para nuestro caso son 1258 datos por cada acción y a omitir la información que no es requerida para el análisis. Generada esta matriz se crea una matriz de rentabilidades con los mismos indicadores a través de la función F-II, esto para cada periodo. Cabe aclarar que el estudio se hace de manera diaria para los 5 años.

Una vez obtenidos los resultados de la matriz de rentabilidades se procede a calcular el rendimiento histórico o esperado de cada acción y del indicador, donde este rendimiento histórico corresponde al comportamiento del promedio de la rentabilidad del indicador y las acciones (Court y Tarradellas, 2010, p.132). A continuación, se calcula la varianza de las variables para poder encontrar el riesgo histórico de cada variable el cual nos muestra cual es la acción con menos riesgo. Se prosigue con el cálculo de la covarianza el cuál se calcula con el fin de hallar el riesgo del mercado (BETA) para determinar qué acción presenta el riesgo más bajo.

Una vez obtenidos los resultados anteriores se hace un análisis de los mismos, esto con el fin de buscar la eficiencia y poder predecir la inversión adecuada para el portafolio, brindando al lector una serie de gráficos, realizadas a través de las herramientas del diplomado de business analytic, donde se aprendió a generar gráficos a través de R, google colab y Excel, para mostrar de manera organizada y dinámica la información y compararla a través de gráficos de volatilidad, mediante los cuales se espera visibilizar el comportamiento de las acciones en los diferentes periodos y ver la volatilidad de las acciones respecto a la otra.

El proceso sigue con la ponderación de cada acción para ver el cómo se debería invertir para obtener un portafolio óptimo. En primer lugar, esta ponderación se hace con el 10% para cada acción, pero para hallar el porcentaje adecuado para invertir según el modelo se genera la matriz de markowitz o matriz de varianza y covarianza.

Una vez creada la matriz se procede a calcular la rentabilidad del portafolio, su varianza y su riesgo, con lo cual se utilizan dos perspectivas según el modelo: En primer lugar, se calculan las ponderaciones correctas a través de la mínima varianza, es decir que porcentaje se debería invertir en cada acción para tener un portafolio óptimo a través de la minimización de la varianza, entre menos varianza se tenga menos volátil es la acción y se tiene menor riesgo. Donde Markowitz muestra el siguiente proceso, citado por Court y Tarradellas (2010);

Equation 1

$$\text{Min}(V) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \sigma_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n x_i \sigma_{ij} x_j \quad (3.1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n r_i x_i \geq \rho \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (3.3)$$

$$x_j \neq 0 \quad (3.4)$$

Donde:

1. n = Número de activos financieros considerados.
2. x_j = Fracción invertida den el activo financiero i -ésimo.
3. r_i = Rentabilidad esperada del activo financiero i -ésimo.
4. σ_i^2 = Varianza de la rentabilidad del activo financiero i -ésimo.
5. σ_{ij} = Covarianza entre la rentabilidad esperada del activo i -ésimo y el j -ésimo.
6. V = Varianza de la cartera.
7. ρ = Rentabilidad que el inversor espera recibir como mínimo.

Los cálculos se realizan de manera más dinámica a través de excel y google colab. Sujetos a las siguientes restricciones que indica el modelo,

- a. La rentabilidad esperada debe ser igual o superior a una rentabilidad dada por el inversor ρ [Ecuación (3.2)].

b. La suma de las partes invertidas en cada activo financiero debe ser igual a 1 [Ecuación (3.3)].

c. Que se realicen inversiones positivas [Ecuación (3.4)]. (Court y Tarradellas, 2010, p. 132)

En segundo lugar, las ponderaciones se calculan a través de la máxima rentabilidad, es decir cuánto debo invertir en cada acción de modo tal que el portafolio muestre una mayor rentabilidad para optimizar los resultados. Donde Markowitz muestra el siguiente proceso, citado por Court y Tarradellas (2010);

Equation 2

$$MAX (R) = \sum_{i=1}^N r_i x_i \quad (3.5)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \sigma_{ij} x_j \leq \sigma^2 V \quad (3.6)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (3.7)$$

$$x_i \geq 0 \quad (3.8)$$

Donde:

1. R = Rentabilidad esperada de la cartera de activos financieros.
2. r_i = Rentabilidad esperada del activo i-ésimo.
3. x_i = Fracción invertida en el activo financiero i-ésimo.
4. σ_{ij} = Covarianza entre la rentabilidad esperada del activo i-ésimo y el j-ésimo.
5. $\sigma^2 V$ = Nivel de riesgo preestablecido.

Para este caso los cálculos también se realizan a través de las herramientas del diplomado de Business Analytic, mencionadas anteriormente. Con los resultados de ambos cálculos se hallan las ponderaciones de cómo se debería invertir en cada acción para tener un portafolio óptimo.

Para el modelo de Black-Litterman se utilizaron las mismas 10 acciones y se realizaron los cálculos pertinentes. En primer lugar se calcula la tasa libre de riesgo día con la fórmula $((1+0,035)^{(1/365)})-1$, esta tasa se calcula con el fin de determinar el valor de CAPM el cual “calcula la tasa de retorno apropiada y requerida para descontar los flujos de efectivo futuros que producirá un activo”(Almenare, 2017) . Para hallar este indicador, previamente se calcula el rendimiento

Una vez obtenidos estos resultados para cada acción se realiza la generación de la matriz de covarianza para poder obtener otra matriz, llamada matriz inversa. Con estos resultados se procede a calcular el CAPM nuevamente en conjunto de una vector unitario que será 1 para cada acción. Se prosigue con el cálculo de los datos **h** y **g**, donde h se halla multiplicando el vector unitario e por la matriz inversa y **g** se halla multiplicando r por la matriz inverso,

Equation 3

$$h = eC^{-1}$$

Fuente: Docente William Gilberto a partir de Litterman.

para poder obtener alpha, que se obtiene a través del vector unitario por h en el tiempo (es decir cada vector unitario se debe multiplicar por h e irse sumando). Beta, que es igual al vector unitario por g en el tiempo (beta es igual a la suma producto del vector unitario por g). Gamma, que es igual a la rentabilidad que multiplica a g en el tiempo (es igual a la suma producto de r multiplicado por g). Y Delta, es igual a alpha que multiplica a gama menos beta elevada al cuadrado y representaría crecimiento fundamental que tendría el portafolio en el tiempo.

Equation 4

$$\alpha = eh^t$$

$$\beta = eg^t$$

$$\gamma = rg^t$$

$$\Delta = \alpha\gamma - \beta^2$$

Fuente: Docente William Gilberto a partir de Litterman.

Con los resultados de las variables anteriores se procede a calcular la tangente, que es igual a gama menos beta por la tasa libre de riesgo sobre beta menos alpha por la tasa libre de riesgo. Lambda, que se calcula a partir de gama menos beta por la rentabilidad sobre delta. Y mu, que va a ser igual a alpha por la rentabilidad menos beta sobre el delta.

Equation 5

$$r^t = \frac{\gamma - \beta T_f}{\beta - \alpha r_f}$$

Fuente: Docente William Gilberto a partir de Litterman.

Equation 6

$$\lambda = \frac{\alpha - \beta R}{\Delta}$$

$$\mu = \frac{\alpha R - \beta}{\Delta}$$

Fuente: Docente William Gilberto a partir de Litterman.

Lo que servirá para determinar la inversión obtenida del portafolio para cada acción según Black-Litterman. Donde el portafolio, que para este modelo toma es W se calcula con **landa** por **h**, más **mu** por **g**.

Equation 7

$$w^* = \lambda h + \mu g$$

Fuente: Docente William Gilberto a partir de Litterman.

Una vez realizados los cálculos anteriores, se trae el portafolio propuesto, que para este caso es el portafolio de mínima varianza de Markowitz, encontrado anteriormente, esto con el fin de determinar la desviación la cual se halla a través de la suma de los cuadrados de los portafolios de Black-Litterman Y Marcowitz. Para con esto encontrar la desviación mínima, a través de un lagrangiano, que cambie la ponderación de inversión en las diferentes acciones y se encuentre el portafolio óptimo de inversión.

Con todos los resultados obtenidos, los cuales se hicieron a través de las operaciones mencionadas y de las herramientas de excel y google colab aprendidas y desarrolladas para el correcto análisis de los datos y la información a través del diplomado de Business Analytic, se procede a explicar los resultados y brindar las conclusiones respectivas.

6. Resultados y Discusión

Para este documento se escogieron 10 acciones las cuales fueron Exxon Mobil Corp (XOM), Alphabet Inc. (GOOG), Pfizer Inc (GE), Apple (APPL), Microsoft (MSFT), Tesla (TSLA), NIKE, AMAZON, ADIDAS y Renault, de diferentes mercados para obtener un portafolio diversificado. Se utilizó adicionalmente el índice S&P 500 para hacer la comparativa de la medición del desempeño de las acciones. El análisis se realiza en un periodo de 5 años comprendido de 2015 a 2020, esto con el fin de ver el comportamiento diario de las acciones en este rango de fechas.

Los datos anteriormente mencionados se utilizaron para desarrollar los modelos de Markowitz y Litterman. Ahora bien, el modelo de Markowitz se basa en la racionalidad del inversor, Court E y Tarradellas J, citando a Markowitz, mencionan que su modelo se basaba en las hipótesis de que,

La rentabilidad de cualquier título o cartera es una variable aleatoria subjetiva, cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es conocida por el inversor. El valor medio o esperanza matemática de dicha variable aleatoria se acepta como medida de la rentabilidad de la inversión. También que la medida del riesgo es la dispersión, medida por la varianza o la desviación estándar, de la variable aleatoria que describe la rentabilidad, ya sea de un valor individual o de una cartera. La conducta del inversor lo lleva a preferir aquellas carteras con una mayor rentabilidad y un menor riesgo (2010, p.131).

Debido a lo anterior para poder analizar y el modelo se obtuvieron los siguientes resultados, basados en las variables calculadas, mencionadas por Markowitz.

Tabla 1

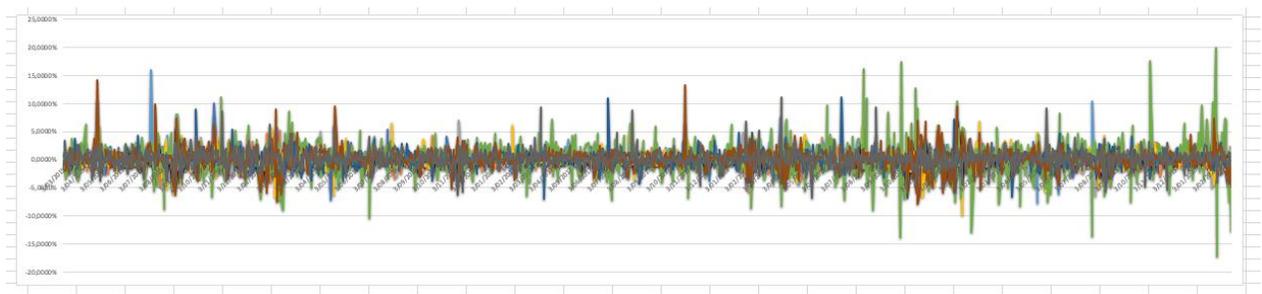
	S+P500	Exxon Mobil Corp (XOM)	Johnson & Johnson Inc. (JNJ)	Pfizer Inc (PFE)	Apple (AAPL)	Microsoft (MSFT)	Tesla (TSLA)	NIKE	AMAZON	ADIDAS	Renault.
RENDIMIENTO ESPERADO/HISTORICO	0,0057%	-0,0376%	0,0782%	0,0051%	0,0722%	0,1128%	0,1438%	0,0576%	0,1426%	0,1268%	-0,0508%
VARIANZA	0,0006967556	0,0001529053	0,0002306600	0,0001329404	0,0002483180	0,0002157849	0,0009137183	0,0002232940	0,0003294673	0,0002583747	0,0003730339
RIESGO HISTÓRICO/VOLATILIDAD	0,026396128	0,012365487	0,015187493	0,011529978	0,015758109	0,014689618	0,030227773	0,014943023	0,018151234	0,016074039	0,019314084
COVARIANZA		-0,0000038813	0,0000053550	0,0000057227	0,0000019012	0,0000005871	-0,0000275305	-0,0000113593	-0,0000101429	0,0000128385	-0,0000161372
RIESGO DE MERCADO/BETA		-0,00557055	0,007685632	0,008213352	0,002728631	0,000842556	-0,039512411	-0,01630308	-0,014557269	0,018426076	-0,023160423

Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

En el modelo Markowitz pretende encontrar unas carteras eficientes, ya sea por la máxima rentabilidad esperada a un riesgo dado o por el mínimo riesgo a una rentabilidad esperada dada (Court y Tarradellas, 2010, p.132). Con los resultados anteriores podríamos decir que la acción más riesgosa para invertir es Tesla, seguida de Renault, debido a que su riesgo histórico o volatilidad es mayor que el de las demás acciones. Por ende, si lo vemos desde la perspectiva del mínimo riesgo, no se debería invertir en estas acciones, sino en Pfizer o Exxon Mobil Corp que presentan una menor volatilidad o riesgo histórico.

También, a través de gráficos de volatilidad, podemos ver el comportamiento de las acciones en el periodo,

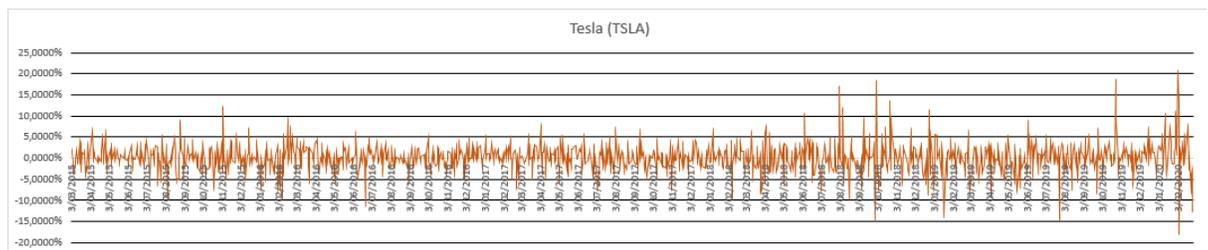
Gráfica 1



Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

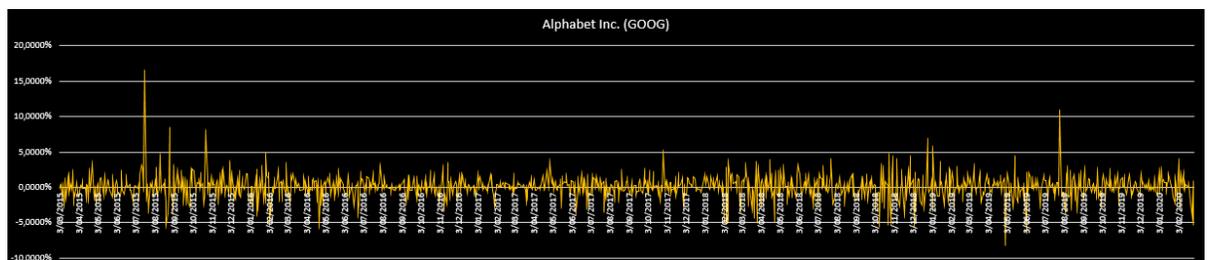
Donde resalta Tesla, como una de las acciones más volátiles, seguida de Alphabet Inc. (GOOG) lo que indica que estas dos acciones son las que mayor variación han tenido, presentando caídas y bajas pronunciadas en sus precios. Mientras que ADIDAS es una de las acciones menos volátil en el portafolio, es decir, que se ha mantenido estable, con variaciones mínimas en el mercado, durante el periodo.

Gráfica 2



Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

Gráfica 3



Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

En las gráficas de volatilidad interiores, se puede observar que, para el caso de Tesla, la mayor volatilidad es para el periodo de 2018 a 2020, es decir, en estos periodos se puede observar que la acción tuvo grandes variaciones en su precio.

Mientras que para Alphabet Inc. (GOOG), la mayor volatilidad fué para el periodo de 2015, donde la acción experimentó altas en su precio y para 2018 y 2019, se mueve de manera volátil entre la subida y bajada de precios.

Por otro lado, tenemos el riesgo del mercado, calculado con ayuda de la covarianza, donde nos indica que las acciones más riesgosas son Adidas y Pfizer y las menos riesgosas son Tesla y

Renault. Los que nos indica que con estos resultados no se tiene una visión clara de donde se debería invertir ya que con el riesgo histórico no se debería invertir en Tesla ni en Renault, mientras que para el riesgo del mercado estas son las dos mejores opciones de inversión. Esto debido a que el primer indicador (Riesgo histórico) solo se calcula a través del promedio de la acción a través del periodo con relación a su varianza, mientras que el riesgo del mercado se calcula mediante la covarianza de la acción, pero medida a través de la varianza del indicador S&P 500 para poder determinar el comportamiento de la acción dentro del mercado.

Debido a que los cálculos en esta primera parte del modelo no nos arrojan un resultado claro de la optimización del portafolio, se procede a ponderar lo que se debería invertir en cada acción, inicialmente con un 10% para cada acción para obtener una suma de 100% en el total de la inversión del portafolio, como se muestra a continuación:

Tabla 2

	Exxon Mobil Corp (XOM)	Alphabet Inc. (GOOG)	Pfizer Inc (GE)	Apple (APPL)	Microsoft (MSFT)	Tesla (TSLA)	NIKE	AMAZON	ADIDAS	Renault.	TOTAL
RENDIMIENTO ESPERADO/HISTORICO	-0,00037634	0,00078167	0,00005098	0,00072202	0,00112799	0,00143785	0,00057571	0,00142591	0,00126782	-0,00050808	
PONDERACIÓN	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	10%	1

Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

Se basa en el rendimiento esperado, ya que es el rendimiento de la acción a través de los años, que es lo que conoce el inversor.

Está información inicialmente ayuda a generar la Matriz de Markowitz, basada en la varianza y covarianza de cada acción, para así poder determinar la varianza del portafolio en su conjunto.

Tabla 3

MATRIZ DE MARKOWITZ										
	<i>Exxon Mobil Corp (XOM)</i>	<i>Alphabet Inc. (GOOG)</i>	<i>Pfizer Inc (GE)</i>	<i>Apple (APPL)</i>	<i>Microsoft (MSFT)</i>	<i>Tesla (TSLA)</i>	<i>NIKE</i>	<i>AMAZON</i>	<i>ADIDAS</i>	<i>Renault.</i>
Exxon Mobil Corp (XOM)	0,0001527836	0,0000666365	0,0000515068	0,0000779167	0,0000698889	0,0000696736	0,0000577328	0,0000657670	0,000005099	0,0000090849
Alphabet Inc. (GOOG)	0,0000666365	0,0002304765	0,0000603128	0,0001309197	0,0001515244	0,0001361757	0,0000886636	0,0001743984	0,0000126773	0,0000112720
Pfizer Inc (GE)	0,0000515068	0,0000603128	0,0001328346	0,0000559273	0,0000644239	0,0000566504	0,0000501806	0,0000617990	0,0000047976	-0,0000022219
Apple (APPL)	0,0000779167	0,0001309197	0,0000559273	0,0002481205	0,0001374828	0,0001453583	0,0000880751	0,0001454298	0,0000090263	0,0000104870
Microsoft (MSFT)	0,0000698889	0,0001515244	0,0000644239	0,0001374828	0,0002156132	0,0001477598	0,0000932728	0,0001759155	0,0000127284	0,0000162066
Tesla (TSLA)	0,0000696736	0,0001361757	0,0000566504	0,0001453583	0,0001477598	0,0009129914	0,0001220736	0,0001728499	0,0000076462	0,0000202156
NIKE	0,0000577328	0,0000886636	0,0000501806	0,0000880751	0,0000932728	0,0001220736	0,0002231163	0,0000956004	0,0000159493	0,0000037141
AMAZON	0,0000657670	0,0001743984	0,0000617990	0,0001454298	0,0001759155	0,0001728499	0,0000956004	0,0003292052	0,0000224933	0,0000096419
ADIDAS	0,000005099	0,0000126773	0,0000047976	0,0000090263	0,0000127284	0,0000076462	0,0000159493	0,0000224933	0,0002581692	0,0000019838
Renault.	0,0000090849	0,0000112720	-0,0000022219	0,0000104870	0,0000162066	0,0000202156	0,0000037141	0,0000096419	0,0000019838	0,0003727371

Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

La tabla anterior ayuda a determinar, como ya lo mencionamos, la varianza del portafolio, en base a las ponderaciones de la inversión de cada acción, adicional a esto se calcula la rentabilidad del portafolio la relación al rendimiento esperado de cada acción y su ponderación y el riesgo del portafolio que en la raíz de la varianza del mismo.

Con una ponderación del 10% para cada acción los resultados obtenidos son:

Tabla 4

RENTABILIDAD PORTAFOLIO	0,0006505533
VARIANZA PORTAFOLIO	0,0000903630
RIESGO PORTAFOLIO	0,0095059478

Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

Pero para que la ponderación de cada acción se haga bajo los parámetros del modelo de markowitz, con el objetivo de minimizar la varianza, Court E y Tarradellas J (2010, p.133) enuncian las restricciones que se deben tener, las cuales son:

1. La rentabilidad esperada debe ser igual o superior a una rentabilidad dada por el inversor p.
2. La suma de las partes invertidas en cada activo financiero debe ser igual a 1

3. Que se realicen inversiones positivas.

Lo cual, al aplicarlo a los datos expuestos, nos arroja los siguientes resultados:

Tabla 5

	Exxon Mobil Corp (XOM)	Alphabet Inc. (GOOG)	Pfizer Inc (GE)	Apple (APPL)	Microsoft (MSFT)	Tesla (TSLA)	NIKE	AMAZON	ADIDAS	Renault.	TOTAL
RENDIMIENTO ESPERADO/HISTORICO	-0,00037634	0,00078167	0,00005098	0,00072202	0,00112799	0,00143785	0,00057571	0,00142591	0,00126782	-0,00050808	
PONDERACIÓN	20%	4%	28%	4%	0%	0%	9%	0%	21%	15%	1

Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

Las ponderaciones para cada acción cambian, es decir, si se quiere minimizar la varianza del portafolio, dicho de otra manera, cuánto debo invertir en cada acción si quiero optimizar el portafolio a través del menor riesgo (varianza). En este caso las acciones más riesgosas son Microsoft, Tesla y Amazon ya que no los resultados arrojan 0 inversión para estas acciones, esto se da debido al riesgo y volatilidad que estas presentan. Mientras que Pfizer, Adidas y Exxon Mobil Corp, son las acciones en que más se debería invertir dentro del portafolio, ya que tienen un comportamiento más estable y menos riesgoso.

Con estas ponderaciones, el riesgo, la varianza y el rendimiento del portafolio serían los siguientes:

Tabla 6

RENTABILIDAD PORTAFOLIO	0,0002415585	MINIMA
VARIANZA PORTAFOLIO	0,0000571133	VARIANZA
RIESGO PORTAFOLIO	0,0075573322	

Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

En comparación con los resultados anteriores con ponderaciones del 10% para cada acción, la rentabilidad del portafolio sería menos, pero la varianza y riesgo del mismo serían más bajas.

Por otro lado, Markowitz, citado por Court E y Tarradellas J (2010, p.134), propone también la maximización de la rentabilidad del portafolio, donde se tienen las mismas restricciones anteriores, pero donde no se busca ponderaciones que generen la mayor rentabilidad en el portafolio, de tal manera que los resultados serían los siguientes:

Tabla 7

	Exxon Mobil Corp (XOM)	Alphabet Inc. (GOOG)	Pfizer Inc (GE)	Apple (APPL)	Microsoft (MSFT)	Tesla (TSLA)	NIKE	AMAZON	ADIDAS	Renault.	TOTAL
RENDIMIENTO ESPERADO/HISTORICO	-0,00037634	0,00078167	0,00005098	0,00072202	0,00112799	0,00143785	0,00057571	0,00142591	0,00126782	-0,00050808	
PONDERACIÓN	0%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	1

Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

Al hablar de una máxima rentabilidad, los resultados del modelo sugieren invertir en una sola acción, la cual en este caso sería Tesla, lo cual indica que a mayor rentabilidad, mayor riesgo. Con esta ponderación la rentabilidad, varianza y riesgo del portafolio serían los siguientes:

Tabla 8

RENTABILIDAD PORTAFOLIO	0,0014378485	MA RENTABILIDAD
VARIANZA PORTAFOLIO	0,0009129914	
RIESGO PORTAFOLIO	0,0302157468	

Fuente: Elaboración propia a partir de Markowitz.

La rentabilidad, efectivamente sería mayor que en los dos anteriores resultados, la varianza sería mayor, es decir, mayor volatilidad y por ende el riesgo del portafolio sería mucho mayor.

En este caso se puede concluir que el modelo de Markowitz, por mínima varianza presenta una adversidad al riesgo, donde la optimización de la cartera o portafolio se da invirtiendo el 28% en Pfizer, el 21% en Adidas, el 20% Exxon Mobil Corp, el 15% en Renault, el 9% en Nike y el 4% en Alphabet Inc y Apple y no invertir nada (0%) en Microsoft, Tesla y Amazon.

Por otro lado, se tiene que el modelo de Black-litterman el cual parte de modelo de Markowitz, pero este propone la noción de una serie de rentabilidades esperadas que igualen a la oferta y demanda de activos financieros, si los inversionistas tuvieran las expectativas en común (Franco, Avendaño y Barbutin, 2011, p. 7). Es decir, este modelo toma en cuenta las expectativas de los inversionistas y el equilibrio del mercado, para que el portafolio óptimo obtenido contenga el rendimiento óptimo de cada acción.

“En este modelo de black-litterman la rentabilidad esperada se obtiene por optimización inversa; es decir, se plantea que la rentabilidad esperada supone la ponderación que indica la capitalización” (Franco, Avendaño y Barbutin, 2011, p. 7). Para hallar estas rentabilidades esperadas, las cuales indican la ponderación que debería tener cada activo, se utilizan inicialmente las mismas 10 acciones nombradas anteriormente y el mismo índice de S&P 500 y se tiene la misma matriz de precios y rentabilidades del modelo anterior.

Con esta matriz se derivan los rendimientos esperados, seguido de la obtención de la tasa libre de riesgo día y obteniendo el retorno esperado de las acciones, que se haya a través del promedio de cada acción en la matriz de rentabilidades y del indicador S&P 500 como rentabilidad del mercado. Seguido de esto se halla el Beta, el cual equivale a la pendiente de la acción respecto al mercado, es decir respecto al indicador S&P 500, lo que se traduce en el riesgo asociado al mercado. Por último, para esta primera parte del desarrollo del modelo se calcula el modelo CAPM, para poder medir cuánto se debería invertir a partir de la reacción entre los retornos y el riesgo de las acciones. A continuación, se muestra los resultados obtenidos de lo mencionado anteriormente:

Tabla 9

LITTERMAN											
Tasa libre de riesgo día 0,00943%											
	S+P500	Mobil Corp	Alphabet Inc. (GOO)	Pfizer Inc (GE)	Apple (APPL)	Microsoft (MSF)	Tesla (TSLA)	NIKE	AMAZON	ADIDAS	Renault.
RENDIMIEN	0,00572%	-0,03763%	0,07817%	0,00510%	0,07220%	0,11280%	0,14378%	0,05757%	0,14259%	0,12678%	-0,05081%
Beta	1	-0,005575	0,0076918	0,0082199	0,0027308	0,0008432	-0,0395439	-0,0163161	-0,0145689	0,0184407	-0,0231789
CAPM		0,00945%	0,00940%	0,00940%	0,00942%	0,00942%	0,00957%	0,00949%	0,00948%	0,00936%	0,00951%

Fuente: Elaboración propia a partir de Litterman.

Con los resultados mostrados en la gráfica se puede observar la rentabilidad en torno al nivel de riesgo que se va tener dentro del mercado, donde, dados los resultados, la mejor opción de inversión es Tesla, seguido de Renault, Nike y Amazon y el nivel de inversión más bajo estaría en Adidas.

Después de esto se genera la matriz de varianza y covarianza, para generar la matriz inversa a la misma, como se muestra a continuación:

Tabla 10

MATRIZ DE COVARIANZA										
	Exxon Mobil Corp	Alphabet Inc. (GOO)	Pfizer Inc (GE)	Apple (APPL)	Microsoft (MSF)	Tesla (TSLA)	NIKE	AMAZON	ADIDAS	Renault.
Exxon Mobil	0,000152784	0,000066636	0,000051507	0,000077917	0,000069889	0,000069674	0,000057733	0,000065767	0,00000510	0,00009085
Alphabet Inc	0,000066636	0,000230476	0,000060313	0,000130920	0,000151524	0,000136176	0,000088664	0,000174398	0,000012677	0,000011272
Pfizer Inc (G	0,000051507	0,000060313	0,000132835	0,000055927	0,000064424	0,000056650	0,000050181	0,000061799	0,000004798	-0,000002222
Apple (APPL	0,000077917	0,000130920	0,000055927	0,000248120	0,000137483	0,000145358	0,000088075	0,000145430	0,000009026	0,000010487
Microsoft (M	0,000069889	0,000151524	0,000064424	0,000137483	0,000215613	0,000147760	0,000093273	0,000175916	0,000012728	0,000016207
Tesla (TSLA)	0,000069674	0,000136176	0,000056650	0,000145358	0,000147760	0,000912991	0,000122074	0,000172850	0,000007646	0,000020216
NIKE	0,000057733	0,000088664	0,000050181	0,000088075	0,000093273	0,000122074	0,000223116	0,000095600	0,000015949	0,000003714
AMAZON	0,000065767	0,000174398	0,000061799	0,000145430	0,000175916	0,000172850	0,000095600	0,000329205	0,000022493	0,000009642
ADIDAS	0,00000510	0,000012677	0,000004798	0,000009026	0,000012728	0,000007646	0,000015949	0,000022493	0,000258169	0,000001984
Renault.	0,00009085	0,000011272	-0,000002222	0,000010487	0,000016207	0,000020216	0,000003714	0,000009642	0,000001984	0,0000372737

Tabla 11

MATRIZ INVERSA										
	Exxon Mobil Corp	Alphabet Inc. (GOO)	Pfizer Inc (GE)	Apple (APPL)	Microsoft (MSF)	Tesla (TSLA)	NIKE	AMAZON	ADIDAS	Renault.
Exxon Mobil	8752,78145	-519,900904	-1967,22528	-1402,31781	-742,295766	-46,5291609	-806,218277	163,187945	168,408294	-132,170392
Alphabet Inc	-519,900904	9633,396086	-659,338624	-1288,37138	-3420,87762	-90,5215725	-588,180077	-2258,7167	-10,0322531	-28,3429985
Pfizer Inc (G	-1967,22528	-659,3386238	9613,129974	-187,81196	-1268,80486	0,04365564	-750,700879	-87,6595525	-20,746501	195,4980487
Apple (APPL	-1402,31781	-1288,371382	-187,81196	7152,24423	-2130,0167	-272,219229	-560,626024	-719,817215	29,8733797	2,21681857
Microsoft (M	-742,295766	-3420,87762	-1268,80486	-2130,0167	11931,1409	-282,90644	-949,205034	-2803,96629	-7,52038387	-247,483105
Tesla (TSLA)	-46,5291609	-90,52157247	0,043655644	-272,219229	-282,90644	1294,32181	-325,840769	-257,439195	32,5091414	-36,633559
NIKE	-806,218277	-588,1800766	-750,700879	-560,626024	-949,205034	-325,840769	5984,1279	-183,854046	-233,612695	54,05002956
AMAZON	163,187945	-2258,716703	-87,6595525	-719,817215	-2803,96629	-257,439195	-183,854046	6238,1595	-249,36966	61,72835062
ADIDAS	168,408294	-10,03225309	-20,746501	29,8733797	-7,52038387	32,5091414	-233,612695	-249,36966	3908,63699	-18,2260033
Renault.	-132,170392	-28,34299847	195,4980487	2,21681857	-247,483105	-36,633559	54,0500296	61,7283506	-18,2260033	2698,746786

Fuente: Elaboración propia a partir de Litterman.

La matriz inversa, se usa más adelante para determinar los resultados del modelo de black-litterman.

Después de esto se calcula \mathbf{e} que es una variable unitaria con valor de 1 ($\mathbf{e}=\mathbf{1}$), que representa cada activo o acción del portafolio, se tiene otra variable llamada \mathbf{r} que es lo mismo que la variable anterior CAPM. Adicional a esto se hallan las variables \mathbf{h} y \mathbf{g} que son valores necesarios para encontrar las variables alpha, beta, gamma y delta. Los valores de las variables \mathbf{h} y \mathbf{g} se muestran a continuación para las 10 acciones:

Tabla 12

h	3467,72009	769,1139522	4866,384016	623,15411	78,0646694	14,784686	1639,94013	-97,7468596	3599,92031	2549,383976
g	0,32887522	0,068350622	0,45527208	0,05706713	0,00569846	0,00295377	0,15813763	-0,00524383	0,33643524	0,242564568

Fuente: Elaboración propia a partir de Litterman.

Con los resultados mostrados en la gráfica de las variables mencionadas anteriormente, se encuentran los valores para alpha, beta, gamma y delta, que ayudarán en la conformación final del portafolio bajo el modelo de black-litterman, en este modelo, el valor de **delta** representa el crecimiento del portafolio y a continuación se presentan estos valores:

Tabla 13

alpha	17510,7191
beta	1,6501109
gamma	0,00015551
delta	0,00023391

Fuente: Elaboración propia a partir de Litterman.

Una vez obtenidos estos resultados, se halla la tangente, lambda y mu, como se muestra a continuación:

Tabla 14

Tangente	0,43143166
Lambda	-3042,87432
mu	32290507,5

Fuente: Elaboración propia a partir de Litterman

Con las variables encontradas, descritas anteriormente, se encuentra el portafolio sugerido bajo el modelo de black litterman, donde este se da en relación de **lambda** por **h** más **mu** por **g**, lo que arroja unos valores sobre la inversión al portafolio, donde los valores negativos no se toman en cuenta para la inversión, debido a que no se puede realizar una inversión negativa, Lo valores positivos se suman para sacar un valor total de la inversión, resultado con el cual se obtendrá un porcentaje sobre la inversión adecuada en cada acción para el portafolio, como se mostrará a continuación:

Tabla 15

	Exxon Mobil Corp	habet Inc. (GOO	Pfizer Inc (GE)	Apple (APPL)	icrosoft (MSF)	Tesla (TSLA)	NIKE	AMAZON	ADIDAS	Renault.	TOTAL	TOTAL
PORTAFOLIO	67711,2095	-133240,8146	-106828,4312	-53453,1254	-53534,7024	50390,8005	116212,7324	128105,6149	-90440,2575	75077,9738	437498,3310	100%
Debería ser	15,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	11,5%	26,6%	29,3%	0,0%	17,2%		

Fuente: Elaboración propia a partir de Litterman

Al obtener estos resultados, se pone en contraste el portafolio propuesto de Markowitz para hallar la diferencia entre ambos, a través de la desviación, donde, el modelo de black-litterman, propone minimizar dicha desviación a través de mínima varianza. Esto se hace a través de cambiar los valores de CAPM, de manera tal que estos minimicen la desviación. A continuación, se muestran los resultados descritos:

Tabla 16

PORTAFOLIO PROPUESTO											
VALOR PON	19,8%	4,1%	27,8%	3,6%	0,3%	0,0%	9,3%	0,0%	20,6%	14,6%	100%
Desviación	0,41441603										
CAPM	22,78248133	-71,4993907	-16,7907208	-64,4597639	-202,306678	-16,9487987	-77,2146584	-164,24891	-370,254282	60,98439937	

Fuente: Elaboración propia a partir de Litterman

Aquel portafolio que contenga esos valores, será el portafolio óptimo con el cual se debería invertir, que, para este caso, es el portafolio propuesto por el modelo black-litterman.

7. Conclusión

Los modelos de Markowitz y Litterman ayudan a obtener, a través de sus cálculos y ejecución, un portafolio óptimo de inversión, a través de mi mínima varianza o su contraparte que sería máxima rentabilidad. El modelo de markowitz muestra que se debería invertir el 28% en Pfizer Inc (GE), el 21% en adidas, el 20% en Exxon Mobil Corp (XOM), el 15% en Renault, el 9% en Nike, el 4% en Alphabet Inc. (GOOG) y Apple (APPL) y 0 en Microsoft (MSFT), Tesla (TSLA) y AMAZON, estos resultados a través de mínima varianza, que supone la ponderación adecuada para optimizar el portafolio.

Mientras que por otro, los resultados del modelo de Black-Litterman arrojan que la inversión debería ser 29,3% en AMAZON, 26,6% en NIKE, el 17,2% en Renault, el 15,5% en Exxon Mobil Corp (XOM), el 11,5 en Tesla (TSLA) y 0 en Alphabet Inc. (GOOG), Pfizer Inc (GE), Apple (APPL), Microsoft (MSFT) y ADIDAS para optimizar el portafolio.

Con los resultados se puede observar que ambos modelos difieren en la ponderación de la inversión, es por esto que se halló la desviación entre las ponderaciones de ambos modelos, para proceder a calcular la mínima desviación que genera unas nuevas ponderaciones, ya que ambos modelos basan los resultados en la mínima varianza para sus porcentajes de inversión.

Al realizar este cálculo, donde la mínima desviación es de 0,41441603, se determina que la inversión adecuada para optimizar el portafolio es la inversión resultante del modelo de Black-Litterman. Con lo que se podría afirmar que, en comparación de ambos modelos, respecto al mercado en un periodo de 5 años tomando desde 2015 a 2020, el modelo de Black-Litterman calcula y optimiza de una manera más adecuada el portafolio, debido a que sus resultados generan la mínima desviación, siendo así más eficiente respecto al modelo de Markowitz.

Lo que tendría sentido debido a que, como se mencionó anteriormente, el modelo de Markowitz no toma en cuenta las expectativas de los inversores y supone que el mercado se comporta igual durante todo el periodo, sin variaciones. Mientras que el modelo de Black-Litterman toma las expectativas de los inversores en cuenta y basa sus cálculos en el comportamiento del mercado, lo que lleva a un mejor análisis y una inversión más acorde a las necesidades del inversor y del mercado, complementando así las falencias y vacíos presentes en el modelo de Markowitz, para obtener resultados más eficientes y optimizar de manera adecuada el portafolio.

8. Referencias

- Carlos Almenara Juste, 12 de febrero, 2017. *Modelo de valoración de activos financieros (CAPM)*.
Economipedia.com
- Court E., y Tarradellas J. (2010). *Mercado de capitales*. Pearson Educación.
- Montoya Gil, J. M., & Maya Bastidas, C. (2016). *Comparación de metodologías de optimización de carteras: Markowitz vs. Black-Litterman, para activos financieros colombianos* (Doctoral dissertation, Universidad EAFIT).
- Franco-Arbeláez, L. C., Avendaño-Rúa, C. T., & Barbutín-Díaz, H. (2011). *Modelo de markowitz y modelo de Black-Litterman en la optimización de portafolios de inversión*. *TecnoLógicas*, (26), 71-88.
- Betancourt Bejarano, K., García Díaz, C. M., & Lozano Riaño, V. (2013). *Teoría de Markowitz con metodología EWMA para la toma de decisión sobre cómo invertir su dinero*. *Atlantic Review of Economics*, 1.
- Marín, Z. I. C. (2006). *La diversificación del riesgo en la cartera de créditos del sector financiero con base en la teoría de portafolios*. *AD-minister*, (9), 113-136.
- Salazar, R. C., & Clement, A. (2014). *Aplicación del modelo de Black-Litterman a la selección de portafolios internacionales*. *Quipukamayoc*, 22(41), 113-120.
- Valencia García, J. A. (2018). *Modelo de Black-Litterman para la optimización de portafolios con views obtenidos por modelación de volatilidad* (Doctoral dissertation, Universidad EAFIT).
- Lopez, J. Viasus, O & Perez, D. (2015). *Optimización de portafolios mediante el modelo de Black-Litterman supervisado por la Teoría de Control*.